6.2.1 Zobrazení komplexních čísel v Gaussově rovině

Předpoklady: 6105

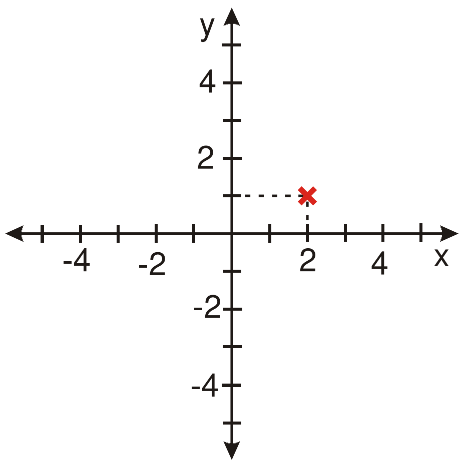
Pedagogická poznámka: Stihnout obsah hodiny je poměrně náročné. Při dostatku času je lepší dojít pouze k příkladu 7 a zbytek hodiny spojit s úvodem hodiny příští, která je také poměrně náročná.

Reálná čísla můžeme zobrazit na číselnou osu. $\Rightarrow$ Jak bychom mohli zobrazit čísla komplexní?

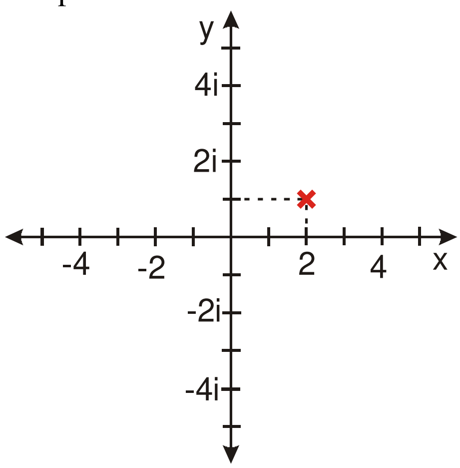
Problém: Na číselnou osu se nevejdou, je už zcela zaplněná reálnými čísly (a ty tvoří jen malou část čísel komplexních).
$\Rightarrow$
Nápad: komplexní číslo $z = a + bi$ - je určeno pomocí uspořádané dvojice reálných čísel (reálná část *a* a imaginární část *b*).
Uspořádané dvojice reálných čísel jsme už zobrazovali například u funkcí: dvojici čísel $[x; f(x)]$ jsme přiřadili bod v rovině, jehož kartézské souřadnice byly $[x; f(x)]$.
$\Rightarrow$ stejně můžeme postupovat u komplexních čísel a zobrazovat je jako body v rovině.

Obrazem komplexního čísla $z = a + bi$ bude bod v rovině o kartézských souřadnicích $[a;b]$.

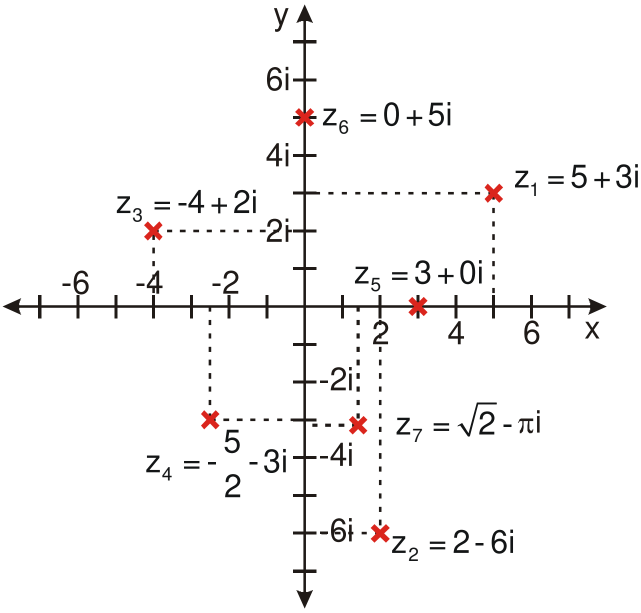
Př. 1: Nakresli obrázek s kartézskou soustavou souřadnic a zakresli do ní obraz komplexního čísla $2+i$.



Protože na svislou osu vynášíme hodnoty imaginární části komplexního čísla, značíme ji rovnou pomocí násobků *i*.



Př. 2: Do obrázku nakresli obrazy komplexních čísel: $z_1 = 5+3i$, $z_2 = 2-6i$, $z_3 = -4+2i$, $z_4 = -\frac{5}{2}-3i$, $z_5 = 3+0i$, $z_6 = 0+5i$, $z_7 = \sqrt{2} - \pi i$.

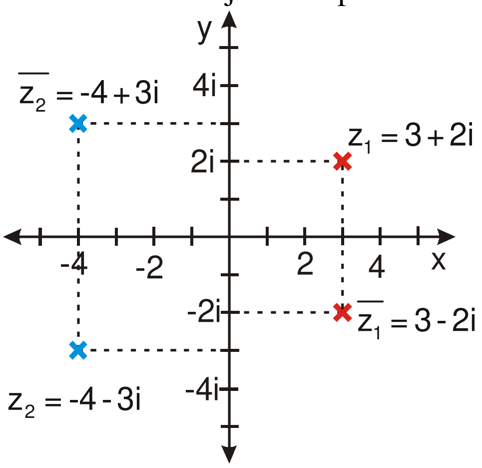


Pojmenování:

- Rovina jejíž body považujeme za obrazy komplexních čísel se nazývá **Gaussova rovina** (podle svého objevitele) nebo **rovina komplexních čísel**
- Osa x (na ní se zobrazí čísla tvaru $a+0i$, tedy reálná čísla) = **reálná osa**
- Osa y (na ní se zobrazí čísla tvaru $0+bi$, tedy ryze imaginární čísla) = **imaginární osa**

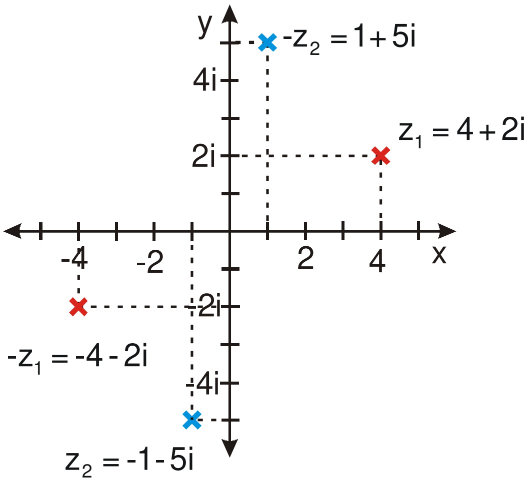
Př. 3: Rozhodni jaký geometrický vztah je mezi obrazy komplexních čísel:
a) komplexně sdružených b) opačných

a) Zobrazíme dvě dvojice komplexně sdružených čísel:



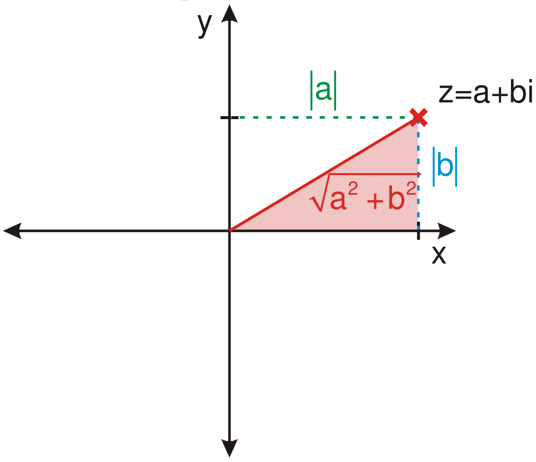
$\Rightarrow$ z obrázku je vidět, že obrazy komplexně sdružených čísel jsou navzájem osově souměrné podle reálné osy.

b) Zobrazíme dvě dvojice opačných čísel:



$\Rightarrow$ z obrázku je vidět, že obrazy opačných čísel jsou navzájem středově souměrné podle počátku.

Jak je to s absolutní hodnotou?
Reálná čísla: absolutní hodnota = vzdálenost obrazu čísla na ose od počátku
Platí to i pro obrazy komplexních čísel v Gaussově rovině?
Nakreslíme si komplexní číslo $z = a + bi$, platí pro něj $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ a vypočteme jeho vzdálenost od počátku.

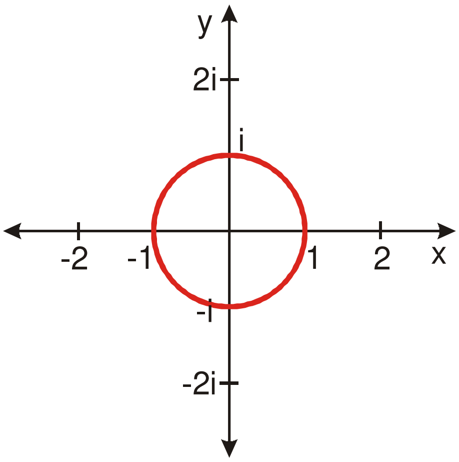


Z obrázku je vidět, vzdálenost obrazu komplexního čísla z od počátku se určí jako přepona v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami $|a|$ a $|b|$ $\Rightarrow$ $d = \sqrt{|a|^2 + |b|^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, což je vztah pro absolutní hodnotu čísla z.

$\Rightarrow$ podobně jako u reálných čísel platí:
Vzdálenost obrazu komplexního čísla v Gaussově rovině od počátku soustavy souřadnic je rovna jeho absolutní hodnotě.

Př. 4: Nakresli do Gaussovy roviny obrazy všech čísel, pro která platí $|z| = 1$.

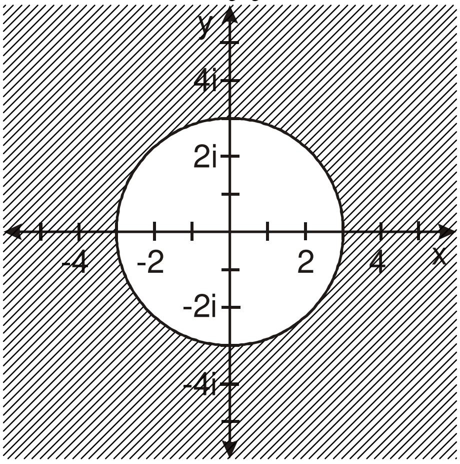
$|z| = 1$ $\Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od počátku o 1 $\Rightarrow$ body na kružnici se středem v počátku a poloměrem 1



Na kružnici je nekonečně mnoho bodů $\Rightarrow$ komplexních jednotek je nekonečně mnoho. Stejně tak bude nekonečně mnoho komplexních čísel s libovolnou další velikostí absolutní hodnoty.

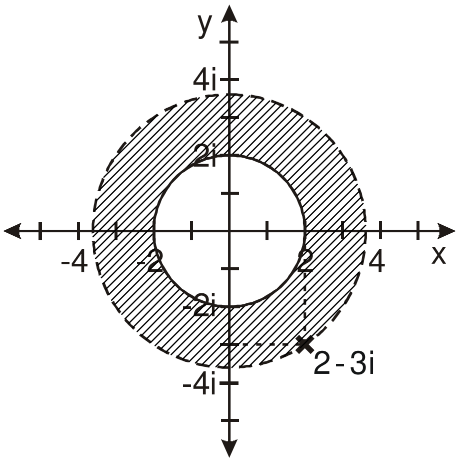
Př. 5: Nakresli do Gaussovy roviny obrazy všech komplexních čísel, pro která platí:
a) $|z| \geq 3$ b) $|2-3i| > |z| \geq 2$

a) Hledáme čísla, jejichž vzdálenost od počátku je větší nebo rovna třem.



b) Hledaná čísla z musí splňovat dvě podmínky:

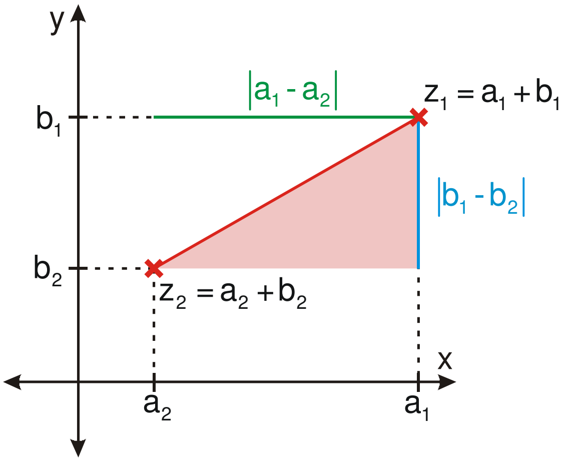
- $|2-3i| > |z|$ $\Rightarrow$ vzdálenost čísla z od počátku je menší než vzdálenost čísla $2-3i$ od počátku,
- $|z| \geq 2$ $\Rightarrow$ jejich vzdálenost od počátku je větší nebo rovna 2.



Podobně jako u reálných čísel platí, že **absolutní hodnota z rozdílu dvou komplexních čísel** $\left|z_1 - z_2\right|$ **se rovná vzdálenosti jejich obrazů v Gaussově rovině**.

Př. 6: (BONUS) Dokaž, že absolutní hodnota z rozdílu dvou komplexních čísel se rovna vzdálenosti jejich obrazů v Gaussově rovině.

$\left|z_1 - z_2\right| = \left|(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i)\right| = \left|(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i\right| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$



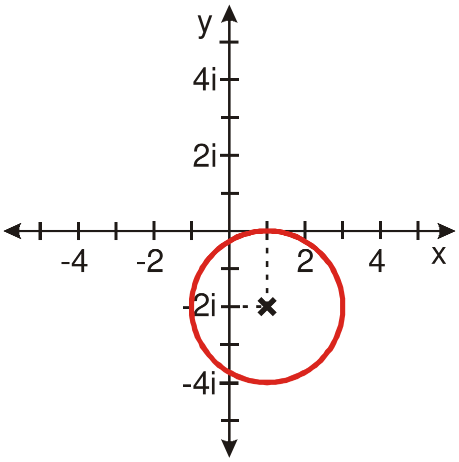
Z obrázku je vidět, vzdálenost obrazů obou komplexních čísel se určí jako přepona v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami $|a|$ a $|b|$ $\Rightarrow$

$d = \sqrt{\left|a_1 - a_2\right|^2 + \left|b_1 - b_2\right|^2} = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$

Př. 7: Nakresli do Gaussovy roviny obrazy všech komplexních čísel, pro která platí:
a) $\left|z - 1 + 2i\right| = 2$ b) $\left|z + 3 - 2i\right| < 3$

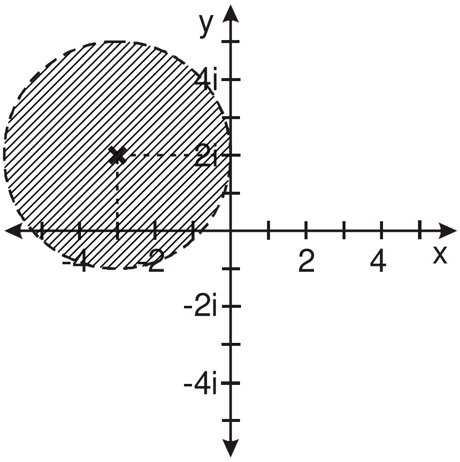
a) $\left|z - 1 + 2i\right| = 2$ V absolutní hodnotě je rozdíl dvou komplexních čísel.

Upravíme výraz tak, aby bylo zřejmé, o jaká čísla jde: $\left|z - (1 - 2i)\right| = 2 \Rightarrow$ hledáme čísla, jejichž obrazy jsou od obrazu čísla $1 - 2i$ vzdáleny o 2 $\Rightarrow$ kružnice s poloměrem 2 a se středem v bodě $[1; -2]$.



b) $|z+3-2i|<3$ V absolutní hodnotě rozdíl dvou komplexních čísel.

Upravíme výraz tak, aby bylo zřejmé o jaká čísla jde $|z-(-3+2i)|<3 \Rightarrow$ hledáme čísla jejichž obrazy jsou od obrazu čísla $-3+2i$ vzdáleny o méně než tři $\Rightarrow$ vnitřek kružnice s poloměrem 3 a se středem v bodě $[-3;2]$.

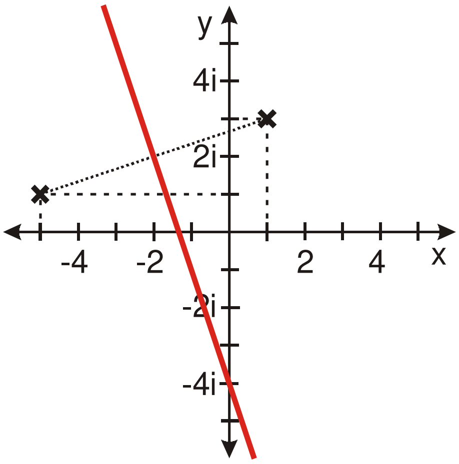


Př. 8: Nakresli do Gaussovy roviny obrazy všech komplexních čísel, pro která platí:
a) $|z-1-3i|=|z+5-i|$ b) $|z+2+5i|\geq|z+4-i|$

a) V rovnosti vystupují dvě absolutní hodnoty:

- $|z-1-3i|=|z-(1+3i)|$ = vzdálenost od obrazu čísla $1+3i$
- $|z+5-i|=|z-(-5+i)|$ = vzdálenost od obrazu čísla $-5+i$

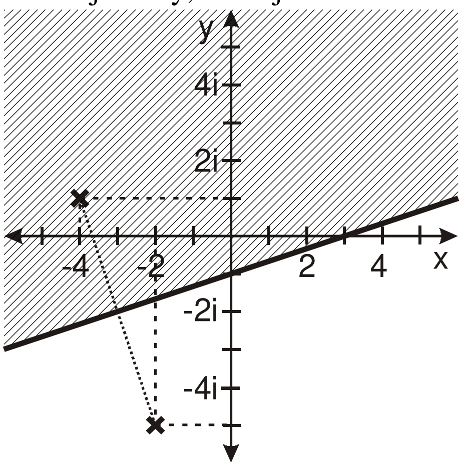
Hledáme čísla, jejichž obrazy jsou od obou čísel stejně daleko $\Rightarrow$ osa úsečky s krajními body $1+3i$ a $-5+i$



b) V nerovnosti vystupují dvě absolutní hodnoty:

- $|z+2+5i| = |z-(-2-5i)|$ = vzdálenost od obrazu čísla $-2-5i$
- $|z+4-i| = |z-(-4+i)|$ = vzdálenost od obrazu čísla $-4+i$

Hledáme čísla, jejichž obrazy jsou od obou čísel stejně daleko $\Rightarrow$ osa úsečky s krajními body $1+3i$ a $-5+i$ a čísla, která jsou blíže k číslu $-4+i$ než k číslu $-2-5i \Rightarrow$ horní část obrázku (přímka obsahuje body, které jsou stejně daleko, část obrázku, ve které leží bod $-4+i$, obsahuje body, které jsou k bodu $-4+i$ blíže)



Př. 9: (BONUS) Nakresli do Gaussovy roviny obrazy všech komplexních čísel, pro která platí $\left|\frac{\overline{z}}{|z|}+|z|\right| = 3$.

Výraz vlevo nakreslit nedokážeme $\Rightarrow$ zkusíme upravovat.

$$\left|\frac{\overline{z}}{|z|}+|z|\right| = \left|\frac{\overline{z}+|z|^2}{|z|}\right|$$ použijeme $|z|^2 = z\cdot\overline{z}$

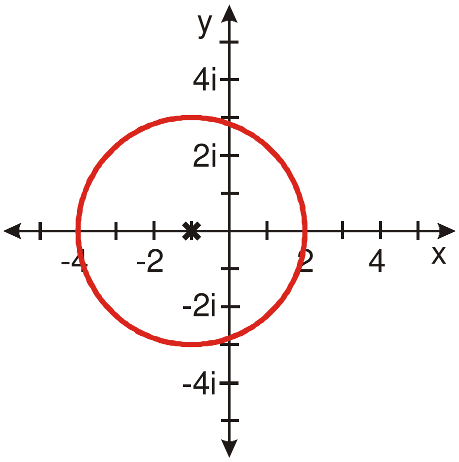
$$\left|\frac{\overline{z}+|z|^2}{|z|}\right| = \left|\frac{\overline{z}+z\cdot\overline{z}}{|z|}\right| = \left|\frac{\overline{z}(1+z)}{|z|}\right|$$ absolutní hodnotu můžeme podle vzorců rozdělit

$$\left|\frac{\overline{z}(1+z)}{|z|}\right| = \frac{|\overline{z}||1+z|}{|z|}$$ platí $|z| = |\overline{z}|$ komplexně sdružená čísla se liší pouze ve znaménku imaginární části $\Rightarrow$ jejich absolutní hodnoty jsou stejné

$\frac{|\overline{z}|}{|z|}|1+z| = \frac{|z|}{|z|}|1+z| = 1 \cdot |1+z| = |1+z|$

Výsledek: $|1+z| = 3$

Upravíme: $|z-(-1)| = 3 \Rightarrow$ hledáme čísla, která jsou od obrazu čísla $-1+0i$ vzdálena o 3 $\Rightarrow$ kružnice se středem v bodě $[-1;0]$ a poloměrem 3



Shrnutí: